Michael de Villiers (1996) E-mail: profmd@mweb.co.za
The Future of Secondary School Geometry.

La lettre de la preuve, Novembre-Décembre 1999.

Traducido por Martín Acosta

Algunos desarrollos en geometría contemporánea

La única geometría que la mayoría de gente conoce es la geometría euclidiana que aprendieron en el colegio. Es mas, parece existir la creencia de que los antiguos griegos y otras civilizaciones anteriores a ellos descubrieron toda la geometría conocida. Muy pocos se dan cuenta de que muchos de los resultados más interesantes de la geometría euclidiana se descubrieron en los siglos diecinueve y veinte, por ejemplo los teoremas de Morley, Miquel, Feuerbach, Steiner, etc. Aparte de eso, en el siglo pasado se desarrollaron las geometrías no euclidianas de Lobachevsky-Bolyai y Riemann. Los axiomas anti-intuitivos de esas dos geometrías revolucionaron completamente la comprensión de los matemáticos acerca de la naturaleza de los axiomas. Mientras muchos habían creído que los axiomas eran "*verdades evidentes*", ahora se daban cuenta de que simplemente eran "*puntos de partida necesarios*" para los sistemas matemáticos. Después de haber creído que las matemáticas trataban de "*verdades absolutas*" en relación con el mundo real, se dieron cuenta de que las matemáticas tratan de "*verdades proposicionales*" que pueden o no tener aplicaciones en el mundo real, y que realmente la aplicabilidad no era un criterio necesario para las matemáticas.
En la Tabla 1 presentamos dos ejemplos de las geometrías de Lobachevsky-Bolyai y Riemann. Los modelos respectivos son los llamados disco de Poincaré y la geometría de la esfera.

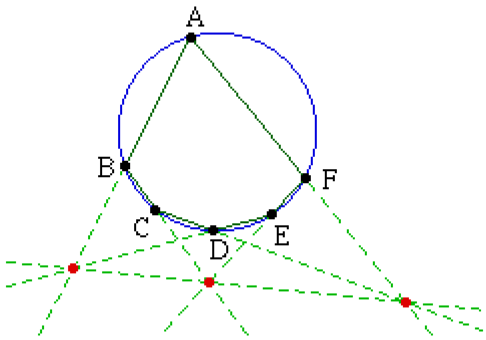
Lobachevsky-Bolyai	**Riemann**
Axioma (Adaptado): Por un punto P exterior a una recta r pueden trazarse al menos dos paralelas a r .	*Axioma (Adaptado): Por un punto P exterior a una recta r no puede trazarse ninguna paralela a r .*
Teorema: La suma de los ángulos de un triángulo es menor a 180 grados y su área es proporcional al "defecto" de esta suma.	*Teorema: La suma de los ángulos de un triángulo es mayor a 180 grados y su área es proporcional al "exceso" de esta suma .*

Tabla 1

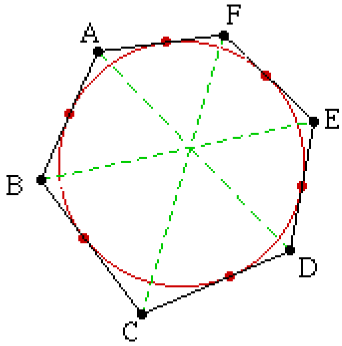
El siglo pasado también vio el desarrollo axiomático de la geometría proyectiva cuyos orígenes se remontan a Papo (350 AC) y Desargues (1639). Un gran adelanto lo constituyó el descubrimiento y prueba del principio de *dualidad* de manera independiente por Poncelet, Plucker y Gergonne en 1826. Dos teoremas o configuraciones son llamados *duales* si uno puede obtenerse del otro remplazando cada concepto y operador por su concepto u operador dual. En geometría proyectiva encontramos la siguiente dualidad:

vértices (puntos) - lados (rectas)
inscritos en una circunferencia - circunscritos alrededor de una circunferencia
colineales - concurrentes

Esta dualidad se refleja de manera sorprendente en los teoremas de Pascal(1623 - 1662) y Brianchon (1785 - 1864) como sigue:



Teorema de Pascal
Si un hexágono está inscrito en una circunferencia entonces los tres puntos de intersección de los lados opuestos son colineales (están sobre una misma recta)



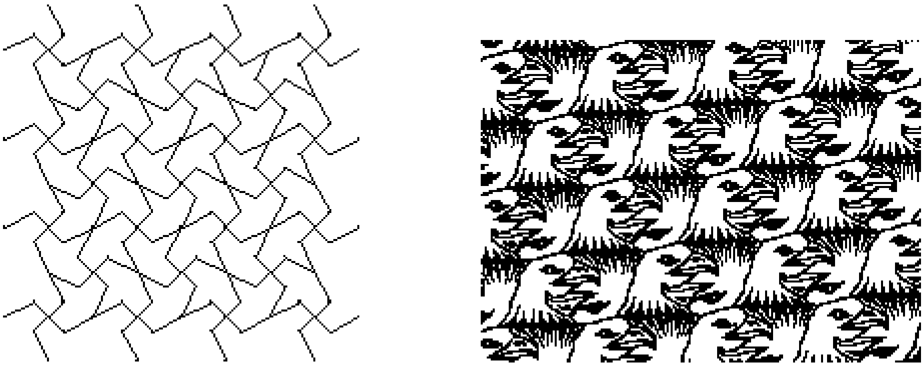
Teorema de Brianchon
Si un hexágono está circunscrito a una circunferencia, entonces las tres rectas (diagonales) que conectan los vértices opuestos son concurrentes (se cortan en un mismo punto)

Figura 1: Teoremas de Pascal & Brianchon

Aunque el tratamiento axiomático inicial de la geometría proyectiva era exclusivamente sintético, durante la segunda mitad del siglo pasado se desarrollaron métodos analíticos para su tratamiento. El más notable fue el famoso programa *Erlangen* de Klein (1872) que describe la geometría como el estudio de las propiedades geométricas que permanecen *invariantes* (sin cambios) bajo varios grupos de transformaciones. En resumen, la geometría puede clasificarse de acuerdo con este planteamiento como sigue:

isometrías - transformaciones de figuras planas que preservan las distancias y los ángulos (congruencia)
semejanzas - transformaciones de figuras planas donde se preserva la forma (semejanza)
afinidades - transformaciones de figuras planas donde se preserva el paralelismo
proyectividades - transformaciones de figuras planas que preservan la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas
topologías - transformaciones de figuras planas que preservan el cerramiento y la orientacion

Desde tiempo inmemorial, los seres humanos han utilizado patrones geométricos de una y dos dimensiones para adornar sus viviendas, vestidos e implementos. La Figura 2a por ejemplo muestra un enlosado moro de la Alambra en el sur de España. El artista holandés Maurits Escher utilizó las teselaciones de manera extensiva en la producción de sus obras de arte en el período de 1937-1971 (ver Figura 2b para una teselación de Escher). Aunque parezca sorprendente, los matemáticos han dedicado una atención sin precedentes al estudio de las teselaciones y cenefas en el siglo veinte. No obstante, en los años setenta un ama de casa, Marjorie Rice, descubrió cuatro nuevos pentágonos convexos que teselan el plano, a pesar de que los matemáticos pensaban en ese momento que la lista de pentágonos que teselan el plano estaba completa (ver Schattschneider, 1981). Recientemente Grunbaum & Shepherd (1986) produjeron una investigación sistemática que en cierto grado es equiparable a los *Elementos* de Euclides.



(a) (b)

Figura 2: Ejemplos de teselaciones

Uno de los conceptos importantes en la clasificación de cenefas y teselaciones es el de *simetría*. Utilizando este concepto pueden clasificarse las cenefas en siete tipos diferentes y las teselaciones en diecisiete tipos diferentes. Una propiedad evidente de cualquier composición modular es la repetición de módulos. Si una composición modular tiene simetría traslacional en dos direcciones diferentes, es llamada *periódica.* Aunque las composiciones modulares más comunes son periódicas, sólo hace aproximadamente veinte años el matemático ingles Penrose descubrió un sorprendente grupo de dos cuadriláteros que teselan de manera no periódica (p.e ver Benade, 1995). En realidad, todavía es una pregunta abierta si existe una figura que pueda teselar de manera no periódica.

Otro desarrollo interesante de los últimos años es la geometría fractal, que consiste en el estudio de objetos geométricos de dimensiones fraccionarias. Una nube es un buen ejemplo de fractal. Aunque realmente no es tridimensional, con toda seguridad no es bidimensional; podríamos decir entonces que sus dimensiones están entre dos y tres. De hecho, muchos objetos reales como las líneas costeras, las hojas de helecho, las cadenas montañosas, los árboles, los cristales, etc. tienen propiedades fractales. La compresión fractal de imágenes se usa hoy en día en multimedia y aplicaciones de imágenes computarizadas. Una importante propiedad de los fractales es la *auto-semejanza* que aproximadamente quiere decir que cualquier subconjunto de la figura es semejante a la figura total. En la Figura 3 hay dos ejemplos de fractales donde se ilustra claramente esta propiedad.

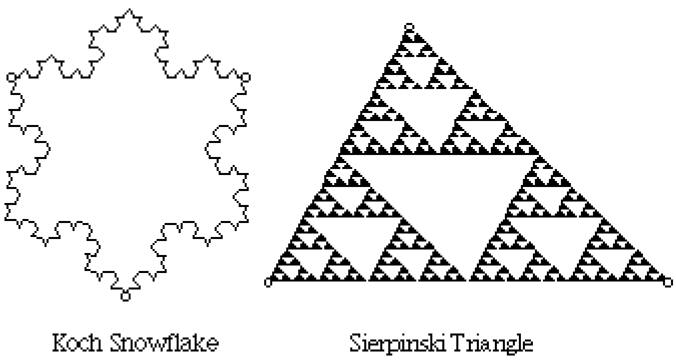


Figura 3: Ejemplos de fractales

En los últimos años también se ha desarrollado y ampliado la Teoría de Nudos y sus aplicaciones a la biología, el uso de Geometría proyectiva para el diseño de programas de realidad virtual, la aplicación de la Teoría de Códigos para el diseño de unidades de CD, una investigación de la geometría sobre robótica, etc. Incluso la Geometría de las Bombas de Jabón está siendo estudiada y se le dedicó una sesión especial en la Burlington MathsFest en 1995. en 1986 Eugene Krause escribió un libro exquisito sobre la geometría de los Taxis, donde introduce un nuevo tipo de geometría no euclidiana. En la década pasada se llevaron a cabo varias conferencias internacionales de geometría. De hecho, David henderson de la Universidad de Cornell, Estados Unidos, le comentó al autor que actualmente tienen mas estudiantes de postgrado en geometría o campos relacionados con la geometría que en álgebra. Incluso la geometría euclidiana está experimentando un renacer exitante en gran parte debido al desarrollo reciente del software de geometría dinámica como ***Cabri*** y ***Sketchpad***. En efecto, Philippe Davies (1995) describe un posible futuro prospero de la investigación en geometría del triángulo. Recientemente Adrian Oldknow (1995, 1996) por ejemplo utilizó *Sketchpad* para descubrir el hasta ahora desconocido resultado que establece que el centro de Soddy, el incentro y el punto de Gergonne de un triángulo son colineales (entre otros resultados interesantes). El centro de Soddy recibió ese nombre por el ganador del premio Nobel de Química, Frederick Soddy, quien publicó el siguiente resultado en 1936: Si se dibujan tres circunferencias con centros en los vértices de un triángulo y tangentes entre sí como se muestra en la Figura 4 (sólo existe una posibilidad de esta configuración en un triángulo), entonces existe una cuarta circunferencia tangente a las otras tres. (El centro de desa circunferencia se conoce ahora como centro (interior) de Soddy S - existe también uno exterior).

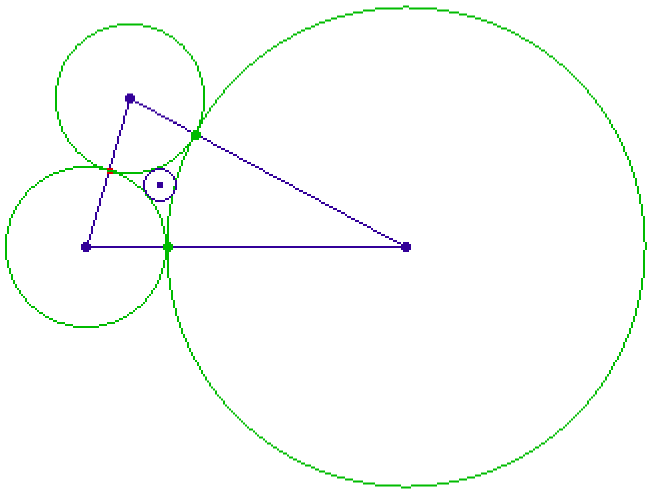
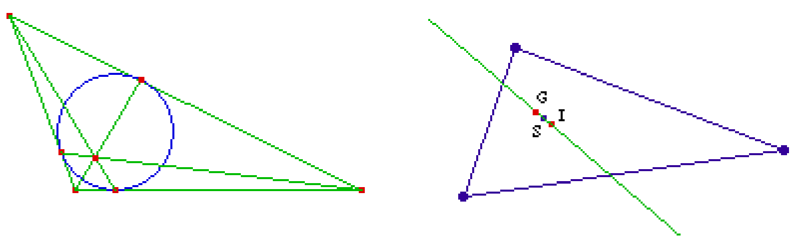


Figura 4: Centro de Soddy



(b)

(a)

Figura 5: Punto de Gergonne & Recta Gergonne-Soddy-Incentro

El punto Gergonne G de un triángulo es el punto de concurrencia de los tres segmentos que unen los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados opuestos (ver Figura 5a). (El punto de Gergonne casualmente es solo un caso especial degenerado del Teorema de Brianchon). Como muestra la Figura 5b, encontramos el sorprendente resultado que el punto de Gergonne, el centro de Soddy y el incentro están alineados. (El centro exterior de Soddy también queda sobre esa recta.).

El autor también descubrió recientemente dos generalizaciones interesantes del teorema de Von aubel utilizando software de geometría dinámica. Este teorema establece que si se construyen cuadrados en los lados de cualquier cuadrilátero entonces los segmentos que unen los centros de los cuadrados con los lados opuestos son siempre congruentes y perpendiculares (ver Yaglom, 1962 o Kelly, 1966). Luego de un poco de experimentación, el autor logró generalizar este resultado para rectángulos y rombos en los lados como se muestra enseguida (las demostraciones están en De Villiers, 1996 & In press). En la Figura 6, EG siempre es perpendicular a FH. También KM es congruente con LN donde K, L, M y N son los puntos medios de los segmentos que unen sol vértices adyacentes de rectángulos semejantes .

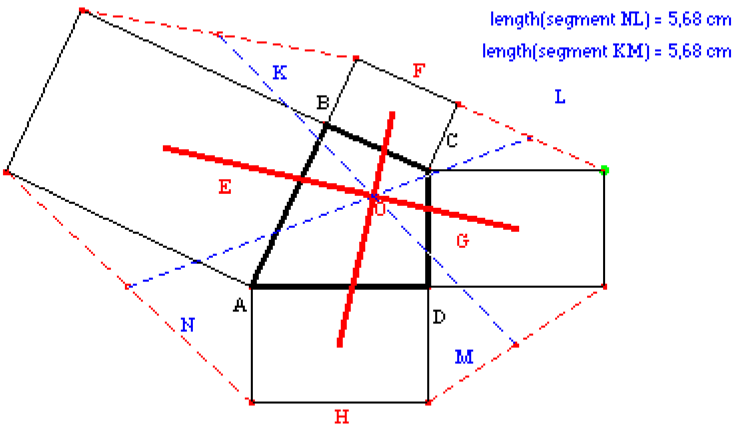
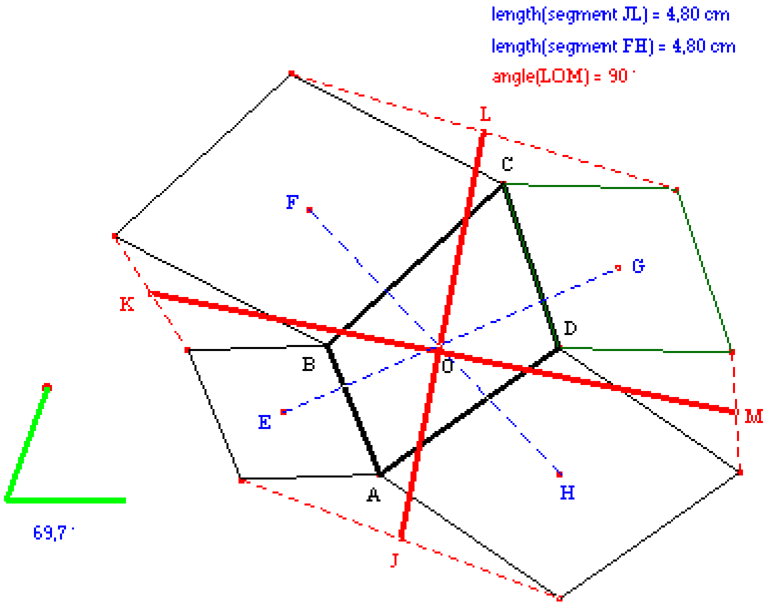


Figura 6

En la Figura 7, EG siempre es congruente con FH. Tambien KM es perpendicular a LN donde K, L, M y N son los puntos medios de los segmentos que unen los vértices adyacentes de rombos semejantes. La "intersección" de esos dos resultados es el teorema de Von Aubel.



generalización de Von Aubel con rombos

Figura 7

Tan sólo una breve revisión de algunos números recientes de revistas matemáticas como el *Mathematical Intelligencer* , *American Mathematical Monthly* , *The Mathematical Gazette* , *Mathematics Magazine* , *Mathematics & Informatics Quarterly*, etc. muestra la creciente actividad e interés en la tradicional geometría euclidiana. El Matemático Crelle dijo una vez: "*Es realmente maravilloso que una figura tan simple como el triángulo tenga tan gran número de propiedades".* Tal vez esto se aplique mucho mas a la geometría euclidiana en general!