Michael de Villiers **(1996)** E-mail: profmd@mweb.co.za
The Future of Secondary School Geometry.

La lettre de la preuve, Novembre-Décembre 1999.
Traducido por Martín Acosta

Algunos desarrollos en la enseñanza de la geometría(1)

La teoría de Van Hiele
Investigaciones Rusas sobre la enseñanza de la geometría
El currículo de geometría de la escuela primaria y secundaria

La teoría de Van Hiele

La teoría de Van Hiele tiene su origen en las disertaciones doctorales de Dina van Hiele-Geldof y su esposo Pierre van Hiele en la Universidad de Utrecht, Holanda en 1957. Desdichadamente Dina murió poco tiempo después de presentar su disertación, y Pierre fue quien desarrolló y difundió la teoría en publicaciones posteriores.
Mientras la disertación de Pierre trataba de explicar por qué los alumnos tienen problemas para aprender geometría (en este sentido era explicativa y descriptiva), la disertación de dina trataba de un experimento de enseñanza y en este sentido es más prescriptiva sobre el orden del contenido geométrico y las actividades de aprendizaje de los alumnos. La característica más obvia de la teoría es la distinción de cinco niveles de pensamiento con respecto al desarrollo de la comprensión geométrica de los alumnos. Enseguida presentamos cuatro importantes características de la teoría tal como las resume Usiskin (1982:4):

orden fijo - El orden de progreso de los alumnos a lo largo de los niveles de pensamiento es invariante. En otras palabras, un alumno no puede alcanzar el nivel *n* sin haber pasado por el nivel *n-1*.

adyacencia - En cada nivel de pensamiento lo que era intrínseco en el nivel precedente se vuelve extrínseco en el nivel actual.

distinción - Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y su propia red de relaciones que conectan esos símbolos.

separación - Dos personas que razonan en niveles diferentes no pueden entenderse.

La principal razón de fracaso del currículo tradicional de geometría fue atribuida por los esposos Van Hiele al hecho de que el currículo se presentaba a un nivel mas alto del de los alumnos; ¡en otras palabras los alumnos no podían entender al profesor ni el profesor podía entender por qué no entendían! Aunque la teoría de Van Hiele distingue cinco niveles de pensamiento, aquí solo nos centraremos en los cuatro primeros ya que son los más pertinentes para la geometría en secundaria. Las características generales de cada nivel pueden describirse así:

Nivel 1: Reconocimiento
Los alumnos reconocen figuras visualmente por su apariencia global. Reconocen triángulos, cuadrados, paralelogramos, etc. por su forma, pero no identifican explícitamente las propiedades de estas figuras.

Nivel 2: Análisis

Los alumnos comienzan a analizar las propiedades de las figuras y aprenden la terminología técnica apropiada para describirlas, pero no relacionan las figuras o las propiedades de las figuras.

Nivel 3: Ordenamiento
Los alumnos ordenan de manera lógica las propiedades de las figuras utilizando cadenas cortas de deducción y comprenden las relaciones entre las figuras (p.e. inclusión de clases).

Nivel 4: Deducción
Los alumnos comienzan a desarrollar secuencias mas largas de proposiciones y comienzan a comprender el significado de la deducción, el rol de los axiomas, los teoremas y las demostraciones.

Las diferencias entre los tres primeros niveles pueden resumirse como en la Tabla 2 en términos de los objetos y la estructura de pensamientos de cada nivel.

	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**
Objetos de pensamiento	*Figuras individuales*	*Clases de figuras*	*Definiciones de clases de figuras*
Estructura de pensamiento	Reconocimiento visual. Ordenamiento Visual	Reconocimiento de propiedades como características de clases	Reconocimiento y formulación de relaciones lógicas
Ejemplos	• Los paralelogramos van juntos porque "se ven iguales". • Los rectángulos, cuadrados y rombos no son paralelogramos porque "no se ven iguales"	Un paralelogramo tiene: • 4lados • ángulos opuestos = • lados opuestos = • lados opuestos // • Diagonales se bisecan etc. Un rectángulo no es un paralelogramo porque tiene ángulos de 90°	Lados opuestos = implican lados opuestos //. Lados opuestos // implican lados opuestos = ángulos opuestos = implican lados opuestos = Bisección de las diagonales implica simetría central.

Tabla 2

Utilizando entrevistas basadas en tareas, Burger & Shaughnessy (1986) determinaron el nivel de pensamiento de alumnos en los cuatro niveles así:

Nivel 1
(1) A menudo usan propiedades visuales irrelevantes para identificar figuras, para comparar, para clasificar y para describir.
(2) Generalmente se refieren a prototipos visuales de figuras, y se confunden fácilmente por la orientación de la figura.
(3) Una incapacidad para pensar en una variación infinita de un tipo particular de figura (p.e. en términos de orientación y forma)
(4) Clasificación inconsistente de figuras: por ejemplo, uso de propiedades no comunes o irrelevantes para clasificar las figuras.
(5) Descripciones (definiciones) incompletas de figuras al tomar condiciones necesarias (generalmente visuales) como condiciones necesarias.

Nivel 2
(1) Una comparación explícita de figuras en términos de sus propiedades.
(2) Evitación de inclusiones de clases entre diferentes clases de figuras, p.e. cuadrados y rectángulos se consideran disyuntos.
(3) Clasificación de figuras únicamente en términos de una propiedad, por ejemplo, propiedades de los lados, ignorando otras propiedades como simetrías, ángulos y diagonales.
(4) Exhibición de un uso no económico de las propiedades de las figuras para describirlas (definirlas), en lugar de usar las propiedades suficientes.
(5) Un rechazo explícito de definiciones dadas por otros, p.e. el profesor o el libro de texto, en favor de sus propias definiciones.
(6) Un enfoque empírico para establecer la verdad de una proposición, p. e. el uso de la observación y la medición de diferentes dibujos.

Nivel 3
(1) La formulación de definiciones económicas y correctas para las figuras.
(2) Una habilidad para transformar definiciones incompletas en definicio9nes completas y una aceptación y uso más espontáneos de definiciones para conceptos nuevos.
(3) La aceptación de definiciones diferentes equivalentes para el mismo concepto.
(4) La clasificación jerárquica de figuras, p.e. cuadriláteros.
(5) El uso explícito de la forma lógica "*Si...entonces"* en la formulación y tratamiento de conjeturas, así como el uso implícito de reglas lógicas como el *modus ponens*.
(6) Una incertidumbre y falta de claridad con respecto a la función de los axiomas, definiciones y demostraciones.

Nivel 4
(1) Comprensión de las funciones de los axiomas, definiciones y demostraciones.
(2) Producción espontánea de conjeturas y esfuerzos autónomos por verificarlas deductivamente.

Investigaciones Rusas en enseñanza de la geometría

La Geometría siempre ha formado una parte importante del currículo de matemáticas en Rusia en los siglos diecinueve y veinte. Esta soberbia tradición fue influenciada sin duda por (e instrumentalizada en) los logros de varios geómetras rusos en los dos siglos pasados. Tradicionalmente el currículo de geometría en Rusia consiste en dos fases, textualmente, una fase *intuitiva* para los grados 1 a 5 y una fase de *sistematización* (deductiva) a partir del grado 6 (12/13 años).

En los años sesenta los investigadores rusos emprendieron un análisis comprensivo de las fases intuitiva y de sistematización para encontrar respuestas a la pregunta de por qué los alumnos que mostraban un buen progreso en otros temas escolares, presentaban poco progreso en geometría. En su análisis, la teoría de Van Hiele tuvo gran peso. Por ejemplo, se encontró que al final del grado 5 (antes de comenzar la fase de sistematización que requiere por lo menos el nivel 3 de comprensión) solo 10-15% de los alumnos estaban en nivel 2. La principal razón para eso era la atención insuficiente a la geometría en la escuela primaria. Por ejemplo, en los primeros cinco años, los alumnos trabajaban sólo con 12-15 objetos geométricos (y su terminología asociada) principalmente en actividades de nivel 1. En contraste, en el primer tema tratado en el primer mes de grado 6, se esperaba que los alumnos trabajaran con 100 objetos y su terminología, y exigiéndoles el nivel 3 de comprensión. (O si no, el profesor debía tratar de introducir contenidos nuevos en tres niveles simultáneamente). No es sorprendente que hayan descrito el período entre grados 1 y 5 como un "*período prolongado de inactividad geométrica"*.

En consecuencia los rusos diseñaron un curriculo experimental de geometría muy exitoso basado en la teoría de Van Hiele. Descubrieron que un factor importante era la secuencia y desarrollo continuos de conceptos desde el grado 1. Como fue reportado por Wirzup (1976: 75-96), el alumno promedio de Grado 8 del currículo experimental mostró igual o mejor comprensión geométrica que los de grado 11 y 12 del currículo antiguo.

El currículo de geometría en primaria y secundaria

Los paralelos entre la experiencia rusa y la de Sudáfrica son obvios. Nosotros todavía tenemos un currículo de geometría sobrecargado en la escuela secundaria con geometría formal, y con muy poco contenido informal en la primaria. (p.e. ¿cuanta semejanza o geometría de las circunferencias se hace en primaria?) De hecho, es sabido que el desempeño de los alumnos en geometría den grado 12 es peor que en álgebra. ¿Por qué?
La teoría de Van Hiele da una explicación importante. Por ejemplo, la investigación de De Villiers & Njisane (1987) mostró que cerca del 45% de alumnos negros en grado 12 en KwaZulu sólo había alcanzado Nivel 2 o menos, ¡mientras que el examen requería el nivel 3 o superior! Niveles bajos de Van Hiele similares fueron encontrados por Malan (1986), Smith & De Villiers (1990) y Govender (1995). en particular, la transición entre Nivel 1 y nivel 2 plantea problemas específicos para los que aprenden una segunda lengua, ya que implica la adquisición de terminología técnica para describir las propiedades de las figuras. Esto requiere bastante tiempo, y el currículo actual ya está sobrecargado.
Parece claro que ningún esfuerzo ni novedoso método de enseñanza en la secundaria tendrá éxito, amenos que emprendamos una revisión fundamental del currículo de geometría en primaria de acuerdo con las directivas de Van Hiele. ¡El futuro de la geometría en secundaria depende de la geometría en primaria!
En Japón por ejemplo los alumnos comienzan a trabajar en grado 1 con el tangram extendido, así como con otras figuras planas y espaciales (p.e. ver Nohda, 1992). Este esfuerzo continúa en los años siguientes de manera que en grado 5 ya están tratando de manera formal los conceptos de congruencia y semejanza, conceptos que en Sudáfrica solo se introducen en grados 8 y 9. No sorprende que en los últimos estudios internacionales comparativos, los alumnos japoneses hayan superado continuamente a los de los demás países. Aunque la reciente introducción de teselaciones en nuestras escuelas primarias es bienvenida, muchos de nuestros profesores y libros de texto no parecen comprender su importancia en relación con la teoría de Van Hiele. A pesar de que las teselaciones producen una atracción estética debido a sus patrones intrigantes y artísticamente placenteros, la razón fundamental para su introducción en primaria es que proveen un fundamento visual intuitivo (Van Hiele 1) para distintos contenidos geométricos que pueden ser tratados mas adelante de manera formal en un contexto deductivo.
Por ejemplo, en una teselación con patron triangular como la de la Figura 8, puede preguntarse a

los alumnos lo siguiente:

(1) identifique y coloree las rectas paralelas
(2) Qué puede decir de los ángulos A, B, C , D y E y por qué?
(3) qué puede decir de los ángulos A, 1, 2, 3 y 4 u por qué?

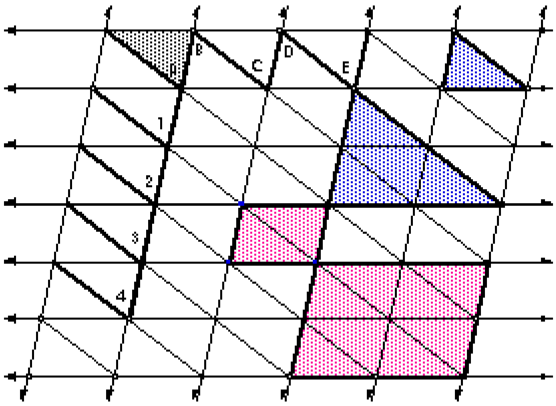

Figura 8: Visualización

En actividades como esta los alumnos comprenderán que los ángulos A, B, C, D y E son iguales porque al hacer una rotación de media vuelta del triangulo gris alrededor del punto medio del lado AB el ángulo A se superpone al ángulo B, etc. De esta forma pueden introducirse por priemra vez los conceptos de "sierras" o "zig-zags" (ángulos alternos). De igual manera, los alumnos deberían darse cuenta de que los ángulos A, 1, 2, 3 y 4 son iguales ya que una traslación del triángulo gris en dirección de los ángulos 1, 2, 3 y 4 hace coincidir conscutivamente el ángulo A con cada uno de los otros. De esta manera puede introducirse por primera vez el cocepto de "escaleras" (ángulos conrespondientes). Debe animarse luego a los alumnos a que encuentrendiferentes sierras y escaleras en esta teselación y en otras con patrones diferentes, para mejorar su habilidad de visualización.
Como cada módulo tiene que ser idéntico y puede coincidir con los otros por medio de traslaciones, rotaciones o simetrías, puede introducirse fácilmente el concepto de congruencia.También se le puede pedir a los alumnos que busquen diferentes formas en las teselaciones, p.e. paralelogramos, trapecios y hexagonos. También se les puede animar abuscar figuras mas grandes con la *misma forma*, para introducir de manera intuitiva el concepto de *semejanza* (como se muestra en la Figura 8 con los triángulos y paralelogramos sombreados). Las teselaciones tambien son un contexto apropiado para el análisis de las propiedades de las figuras geométricas (Van Hiele 2), así como su explicación lógicoa (Van Hiele 3). Por ejemplo, una vez que los alumnos hayan construido una teselación triangular como la de la Figura 9, se les pueden plantear preguntas como las siguientes:

(1) Qué puede decir de los ángulos A y B en relación con D y E? Por qué? Qué puede concluir de esto ?
(2) qué puede decir de los ángulos F y G en relación con los ángulos H e I? Por qué? Qué puede concluir de esto?
(3) qué puede deric del segmento JK en relación con el segmento LM? Por qué? que puede concluir de esto?

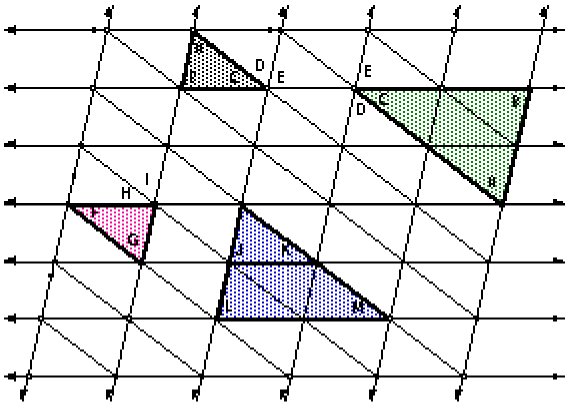

Figura 9: Análisis

En el primer caso los alumnos pueden ver de nuevo que el ángulo A= angulo B debido a la sierra que se forma. Tambien ánguloB= ángulo E debido a una escalera. Por lo tanto es fácil que observen que como esos tres ángulos quedan en una recta, la suma de los ángulos del triángulo ABC debe ser una línea recta. También pueden observar que esto es cierto en cualquier vértice, y para cualquier tamaño y posición del triángulo, posibilitando así una generalización. En el segundo caso, se introduce el teorema de los ángulos exteriores y en el tercer caso el teorema del punto medio. esos análisis están muy cerca de las explicaciones geométricas estandar (pruebas); sólo necesitan un poco de formalización. en la Figura 10 se ilutran los tres niveles para el descubrimiento y la explicación de que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

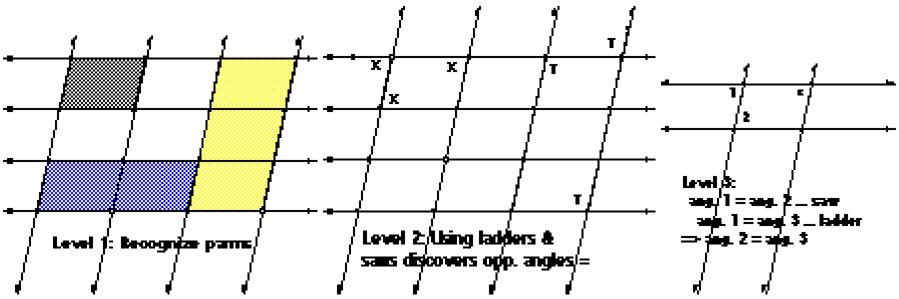

Figura 10: Tres niveles

Otro aspecto importante de la teoría de Van Hiele es que enfatiza que las actividades informales en los niveles 1 y 2 deberían constituir "*subestructuras conceptuales"* apropiadas para las actividades formales del siguiente nivel. Muchas veces he observado profesores y futuros profesores que piden a sus alumnos que midan y sumen los ángulos de un triángulo para descubrir que suman 180. Desde la perspectiva de Van Hiele esto es totalmente inadecuado ya que no provee una subestructura conceptual sobre la cual construir una prueba formal. Por el contrario, la actividad de teselación ya descrita provee esta subestructura. De manera similar, la

actividad de medir los ángulos de la base de un triángulo isósceles es conecptualemente inadecuada, pero doblarlo por su eje de simetría lleva a fundamentar una demostración posterior. Lo mismo se aplica a la investigación de las propiedades de los cuadriláteros. Por ejemplo, es conceptualmente indadecuado medir los ángulos opuestos de un paralelogramo para que los alumnos descubran que son iguales. Es mucho mejor pedirles que le den media vuelta para que descubran que los ángulos (y lados) opuestos coinciden, ya que esto se aplica a todos los paralelogramos y contiene las semillas para una demostración formal.
hace poco tuve una conversación con un profesor que descalifició rápidamente a un compañero suyo quien introdujo las teselaciones dejando que los alumnos empacaran tarjetas. Este profesor pensaba que esto producía patrones irregulares, era poco eficaz y consumía mucho tiempo, y que debería comenzarse entregando a los alumnos parrillas cuadradas o triangulares ya listas y mostrarles como pueden dibujar patrones de teselación regulares (ver Figura 11).
Aunque estas parrillas constituyen un medio útil y eficaz para dibujar patrones regulares, conceptualemtne es de extrema importancia que los alumnos tengan una experiencia previa de empacar físicamente módulos, vg rotar, trasladar, reflejar los módulos a mano. El problema es que es posible dibujar patrones de teselado en esas parrillas sin ninguna comprensión de las isometrías implícitas que los crean, que son concpetualemente importantes para el análisis de propiedades geométricas implicitas en el patrón.

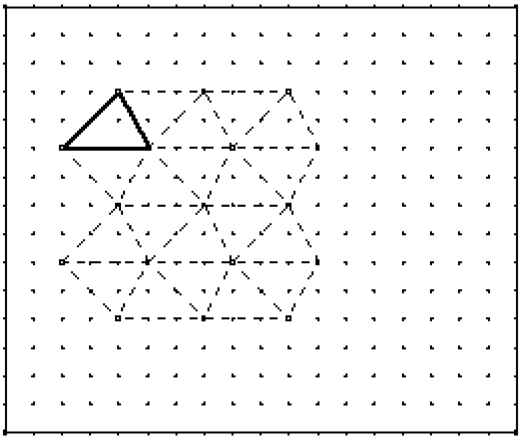

Figura 11: Utilización de parrillas