Michael de Villiers **(1996)** E-mail: profmd@mweb.co.za

The Future of Secondary School Geometry.

La lettre de la preuve, Novembre-Décembre 1999.

Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría(2)

Procesos vs productos en la enseñanza de la geometría
El experimento USEME

Procesos vs productos en la enseñanza de la geometría

La distinción entre "*procesos*" y "*productos*" en educación matemática es relativamente antigua. Aquí entendemos por producto el resultado final de alguna actividad matemática que lo precedía. Haciendo una retrospección hasta 1978, el Syllabus Proposals de la MASA sobre el Proyecto de Matemáticas de Sudáfrica, estableció:

> "*El valor intrínseco de las matemáticas no está contenido únicamente en los PRODUCTOS de la actividad matemática (p.e. conceptos acabados, definiciones, estructuras y sistemas axiomáticos) sino también y en especial en los PROCESOS de la ACTIVIDAD MATEMATICA que condujo a esos productos, p.e. generalizar, reconocer patrones, definir, axiomatizar. Los currículos propuestos intentan reflejar un énfasis mayor en la actividad matemática genuina como opuesta a la mera asimilación de los productos terminados de dicha actividad. Este énfasis se refleja especialmente en las distintas secciones de geometría"* - MASA (1978:3)

Lamentablemente estas buenas intenciones, exceptuando unas pocas escuelas, no fueron implementadas a gran escala en Sudáfrica. La mayoría de los profesores y libros de texto continuaron simplemente entregando a los alumnos contenido terminado que debían asimilar y regurgitar en las evaluaciones.

Este tipo de enseñanza tradicional de la geometría puede compararse a una clase de cocina donde el profesor solo muestra a sus alumnos los pasteles (o aun peor, fotos de pasteles) sin mostrarles qué hay dentro de ellos y cómo se hicieron. ¡Además, ni siquiera se les permite tratar de hacer los pasteles por sí mismos!

La distinción entre algunos de los principales procesos y productos de la geometría formal puede resumirse en la Tabla 3. La mayoría de los productos formales requiere en general una serie de procesos previos, de los cuales indicamos algunos. Los procesos de demostración también tienen su propio producto, una prueba, que debería distinguirse del teorema, definición o axioma al que se refiere.

Producto	**Proceso**

Axiomas	Axiomatizar - Demostrar
Definiciones	Definir - Experimentar - Demostrar
Teoremas	Encontrar y formular teoremas- Experimentar- refutar - encontrar patrones -generalizar - Especializar - visualizar- demostrar
Clasificaciones	Clasificar

Tabla 3

Debido a limitaciones de espacio, aquí sólo nos concentraremos en el tratamiento de definiciones del nivel de Van Hiele 3. La enseñanza directa de definiciones geométricas sin énfasis en los procesos subyacentes ha recibido críticas de matemáticos y educadores matemáticos por igual. Por ejemplo, ya en 1908 Benchara Blandford escribió (citado en Griffiths & Howson, 1974: 216-217):

> "*A mí me parece un método radicalmente vicioso, especialmente en geometría, si no en otros temas, entregar a los niños definiciones acabadas, para que las memoricen después de una explicación mas o menos cuidadosa. Hacer esto es con seguridad eliminar deliberadamente uno de los agentes más valiosos de la disciplina intelectual. El perfeccionar una definición de trabajo por la propia actividad del niño estimulándolo con preguntas adecuadas, es interesante y altamente educativo*"

El conocido matemático Hans Freudenthal (1973:417-418) también criticó la práctica tradicional de entregar definiciones geométricas así:

> "*... la mayoría de las definiciones no han sido el comienzo sino el toque final de la actividad organizativa. No debería privarse a los niños de este privilegio... Una buena enseñanza de la geometría puede significar más aprender a conceptualizar y aprender qué es conceptualizar; aprender a definir y aprender qué es una definición. Significa conducir a los alumnos a comprender por qué una cierta organización, un cierto concepto, una cierta definición es mejor que otra. La enseñanza tradicional es diferente. En lugar de darle la oportunidad al niño de organizar sus experiencias espaciales, el tema se le ofrece como una estructura preorganizada. Todos los conceptos, definiciones y deducciones son preconcebidas por el profesor, quien conoce su uso en el mínimo detalle - o por el autor del libro de texto que ha construido cuidadosamente todos sus secretos en esa estructura.*"

De nuestra discusión precedente de la teoría de Van Hiele debería estar claro que la comprensión de las definiciones formales en el nivel 3, y la entrega directa de definiciones a los alumnos en niveles inferiores está llamada al fracaso. En efecto, si tomamos en serio las teorías constructivistas del aprendizaje (a saber que el conocimiento simplemente no puede transferirse directamente de una persona a otra, y que el conocimiento significativo necesita ser (re)construido por el sujeto), incluso en el nivel 3 deberíamos implicar a los alumnos en la actividad de definir y permitirles escoger sus propias definiciones en cada nivel. Esto implica las siguientes clases de definiciones significativas en cada nivel:

Van Hiele 1
Definiciones v*isuales*, v.g. un rectángulo es un cuadrilátero con todos los ángulos de 90 y dos lados largos y dos cortos.

Van Hiele 2
Definiciones *no económicas*, v.g. un rectángulo es un cuadrilátero con lados opuestos paralelos y congruentes, todos los ángulos de 90, diagonales congruentes, simetría central, dos ejes de simetría por lados opuestos, dos lados largos y dos cortos, etc.

Van Hiele 3
Definiciones *correctas y económicas v*.g. un rectángulo es un cuadrilátero con dos ejes de simetría por lados opuestos.

Como puede verse en los dos ejemplos en los niveles de Van Hiele 1 y 2, las definiciones espontáneas de los alumnos deberían tender también a ser *particionales*, en otras palabras, no deberían permitir la inclusión de cuadrados dentro de los rectángulos (estableciendo explícitamente dos lados cortos y dos largos). Por el contrario, de acuerdo con la teoría de Van Hiele, las definiciones en el nivel 3 deben ser *jerárquicas*, lo que quiere decir que permiten la inclusión de los cuadrados dentro de los rectángulos, y no serían comprensibles por alumnos de niveles inferiores.

La presentación de las definiciones formales en los libros de texto generalmente es precedida por una actividad en la que los alumnos deben comparar en una tabla distintas propiedades de los cuadriláteros, v.g. para ver que un cuadrado, rectángulo y rombo tienen todas las propiedades de un paralelogramo. El propósito evidente es prepararlos para las definiciones formales posteriores que son *jerárquicas*. (En otras palabras, las definiciones dadas prevén la inclusión de casos especiales, v.g. un paralelogramo se define de tal manera que incluya cuadrados, rombos y rectángulos). Sin embargo, la investigación reportada en De Villiers (1994) muestra que muchos alumnos, incluso después de comparaciones en tablas y otras actividades, si se les da la oportunidad, prefieren definir los cuadriláteros en *particiones*. (En otras palabras, preferirán por ejemplo definir un paralelogramo como un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos, pero no todos los ángulos o lados iguales). Un enfoque constructivista no presentaría directamente a los alumnos definiciones acabadas, sino que les permitiría formular sus propias definiciones independientemente de si son particionales o jerárquicas. Los alumnos pueden llegar a entender que hay ciertas ventajas en aceptar una clasificación jerárquica por medio de una discusión que compare en clase las ventajas y desventajas relativas de esas dos maneras de clasificar y definir cuadriláteros (que son ambas matemáticamente correctas). Por ejemplo, si se pide a los alumnos comparar las siguientes dos definiciones de paralelogramo, inmediatamente notarán que la primera es mucho más económica que la segunda.

jerárquica: Un paralelogramo es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos.
particional: Un paralelogramo es un cuadrilátero con ambos pares de lados paralelos pero no todos los ángulos o lados son iguales.

Es evidente que en general las definiciones particionales son más largas pues tienen que incluir propiedades adicionales para asegurar la exclusión de casos especiales. Otra ventaja de las definiciones jerárquicas para los conceptos es que todos los teoremas demostrados para un concepto se aplican automáticamente a sus casos especiales. Por ejemplo, si demostramos que las diagonales de un paralelogramo se bisecan, podemos concluir inmediatamente que esto es cierto para los rectángulos, rombos y cuadrados. Si los hubiéramos definido particionalmente, tendríamos que demostrar separadamente para cada caso (paralelogramos, rectángulos, rombos y cuadrados) que sus diagonales se bisecan. Esto no es económico, evidentemente. Parece claro que a menos que se discuta a fondo en clase el rol y la función de la clasificación jerárquica como fue descrito en De Villiers (1994), muchos alumnos tendrán dificultades para entender por qué no se usan sus definiciones particionales intuitivas.

El experimento USEME

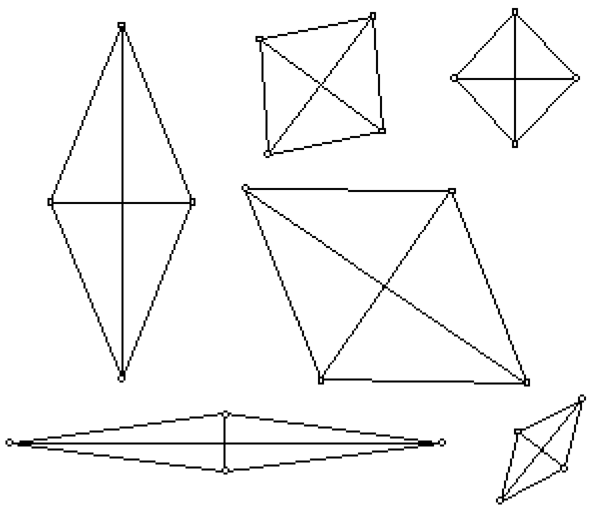
¿Es posible idear estrategias para enseñar los procesos de definir y axiomatizar en los niveles de Van Hiele 3 y 4? Este fue el punto central del Experimento en Educación Matemática de la Universidad de Stellenbosch (USEME por sus siglas en ingles) llevado a cabo con un grupo control en 1977 y un grupo experimental en 1978 (ver Human & Nel et al, 1989a). El experimento se dirigía al grado 10 y se realizó en 19 colegios de la Provincia Cape. Mientras que el enfoque tradicional se concentra exclusivamente en desarrollar habilidades para realizar demostraciones deductivas (especialmente en los ejercicios de aplicación), el enfoque experimental se proponía principalmente:

- desarrollar la habilidad de construir definiciones económicas formales para conceptos geométricos
- desarrollar la comprensión de la naturaleza y rol de los axiomas, definiciones y demostraciones.

El siguiente es un ejemplo de uno de los primeros ejercicios de definición usados en el enfoque experimental (ver Human & Nel et al, 1989b:21).

EJERCICIO

1(a) Haga una lista de todas las propiedades comunes de las siguientes figuras. Mire los ángulos, lados y diagonales y mida si es necesario.



(b) ¿Cómo se llama esta clase de cuadriláteros? (c) ¿cómo explicaría usted a alguien que no los conozca, qué son estos cuadriláteros *(sin hacer un dibujo)*?

La tendencia espontánea de casi todos los alumnos en (c) fue hacer una lista de todas las propiedades descubiertas en (a); esto es, dar una descripción (definición) correcta pero no económica de los rombos (revelando un nivel de comprensión 2). Esto condujo a los dos siguientes ejercicios que trataban de llevarlos a acortar sus descripciones (definiciones), por ejemplo:

EJERCICIO (continuación)

2. Una carta tiene el siguiente encabezado:

> Mr. JH Nel
> "Nelstevrede"
> 9 Venter Avenue
> PO Box 48639
> Stellenbosch
> 7600

(a) La dirección es innecesariamente larga. Escriba una versión mas corta de la dirección anterior de manera que la carta llegue al Sr. Nel (en Stellenbosch el correo llega a los apartados o a las casas)

(b) ¿Habría otras versiones cortas de la dirección que aseguren que la carta llegará al destinatario? Escriba todas las versiones cortas que pueda. Deben ser lo mas cortas posible.

3. (a) Construya tres rombos diferentes.

(b) Revise la descripción verbal que usted dio en 1(c). ¿Su descripción es innecesariamente larga? Si es el caso, de una descripción más corta del rombo que de todas maneras de un rombo si usted construye una figura de acuerdo con la información contenida en su descripción (corta): asegúrese que tendrá todas las propiedades de un rombo, aunque esas propiedades no se mencionen en su descripción corta.

(c) Escriba tres descripciones verbales cortas diferentes de un rombo.

(d) Trate de construir un cuadrilátero que no sea rombo, pero cumpla las condiciones de su primera descripción (corta) en (b). ¡Si puede hacerlo, su descripción no es una descripción precisa de un rombo! Verifique sus otras dos descripciones del rombo de la misma manera.

Aquí se le pidió explícitamente a los alumnos que acortaran sus descripciones (definiciones) de rombo dejando de lado algunas de sus propiedades. Por ejemplo, en 3(a) los alumnos encontraron que no es necesario usar todas las propiedades para construir un rombo. Podría obtenerse construyendo todos los lados iguales. En (b) y en (c) los alumnos típicamente obtuvieron diferentes versiones cortas, algunas de las cuales *estaban incompletas* (¡especialmente si se les promete un premio por hacerlas mas cortas!), por ejemplo: *" Un rombo es un cuadrilátero con diagonales perpendiculares".* Esto dio oportunidad para dar un contraejemplo y discutir la necesidad de contener suficiente información en la descripción (definición) para asegurar que alguien mas sepa exactamente de qué figura estamos hablando.

Con algunos estímulos, los alumnos produjeron diferentes posibilidades. Nótese que en este momento no se les pedía a los alumnos verificar lógicamente sus definiciones, sino por medio de construcciones y medidas precisas (en otras palabras una actividad típica de nivel 2). Por ejemplo, los alumnos debían construir figuras como las de la Figura 12 para evaluar definiciones como las siguientes:

(1) Un rombo es un cuadrilátero con todos los lados iguales
(2) Un rombo es un cuadrilátero con diagonales perpendiculares que se bisecan
(3) Un rombo es un cuadrilátero con diagonales que se bisecan
(4) Un rombo es un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos y un par de lados adyacentes iguales.
(5) Un rombo es un cuadrilátero con diagonales perpendiculares y un par de lados adyacentes iguales.

(6) Un rombo es un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos paralelos y un par de lados adyacentes iguales.

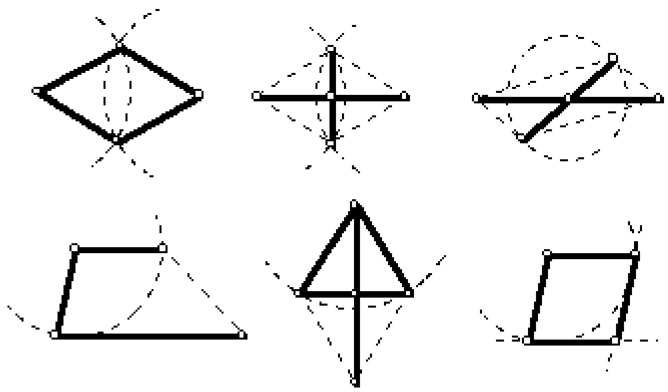


Figura 12: Construcción y medición

Psicológicamente, construcciones como esas son sumamente importantes para la transición de nivel 2 a nivel 3. Ayudan a desarrollar la comprensión de la diferencia entre *premisa* y *conclusión* y su relación *causal*; en otras palabras, de la estructura lógica de una proposición *"si-entonces"*. Cada uno de los anteriores enunciados puede escribirse lógicamente de esa forma. Por ejemplo, el último enunciado podría reescribirse así: "Si un cuadrilátero tiene ambos pares de lados opuestos paralelos y un par de lados adyacentes iguales, entonces es un rombo (v.g. tiene lados iguales, diagonales perpendiculares que se bisecan, etc.)". Smith (1940) reportó una mejora marcada en la comprensión de los alumnos de enunciados "*si-entonces*" pidiéndoles que hicieran construcciones para evaluar enunciados geométricos como sigue:

> "*Los alumnos vieron que cuando ellos hacían ciertas cosas en la construcción de una figura, resultaban otras cosas. Aprendieron a sentir la diferencia de categoría entre las relaciones que ellos ponían en una figura -las cosas sobre las que tenían control- y las relaciones que resultaban sin ninguna acción de su parte. Finalmente la diferencia entre esas dos categorías fue asociada a la diferencia entre condiciones dadas y conclusión, entre la parte-si y la parte-entonces de una proposición.* "

Luego de algo de exploración experimental de diferentes definiciones de rombo como las descritas, comenzaron una fase deductiva donde los alumnos debían partir de una definición para verificar lógicamente si todas las propiedades podían derivarse de ella (como teoremas). Los mismos ejercicios se repitieron para los paralelogramos. Finalmente se explicaba a los alumnos que sería confuso si cada uno usara definiciones diferentes para los rombos y los paralelogramos, y se llegaba a un acuerdo para usar una definición para cada concepto. (Noten que el rol y la función de la clasificación jerárquica de los cuadriláteros no se había incluido de manera adecuada en el momento del experimento USEME, y fue una de las razones para un estudio posterior presentado en De Villiers (1994)).

Un error conceptual entre los alumnos (e incluso entre algunos de sus profesores y libros de texto) es creer que los axiomas son verdades *evidentes*, en lugar de puntos de partida necesarios para un sistema matemático. Un objetivo importante del proyecto USEME era lograr que los alumnos comprendieran la necesidad de las definiciones y axiomas permitiéndoles la experiencia en la que no todas las proposiciones dentro de un sistema formal pueden demostrarse sin llegar a un círculo vicioso, y por lo tanto uno tiene que aceptar algunas proposiciones como puntos de partida (Van Hiele Nivel 4). En lugar de presentar a los alumnos un sistema axiomático acabado, ellos debían realizar la sistematización como sigue (ver Human & Nel et al, 1989b: 43). (Nota: Aunque los alumnos en este momento conocían las propiedades de las rectas paralelas, no tenían una definición formal para las mismas ni habían deducido lógicamente ninguna de las propiedades. (Con anterioridad se había introducido la demostración como un medio de explicación de distintos ejercicios de aplicación interesantes).

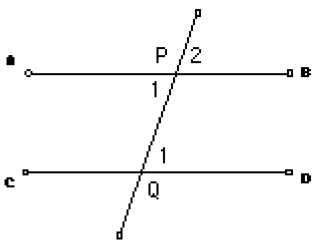
EJERCICIO

1. Trate de demostrar que si una transversal corta dos rectas paralelas, los ángulos alternos son iguales. Haga uso de nuestras suposiciones sobre rectas paralelas (ángulos correspondientes iguales, ángulos co-interiorres suplementarios), y del teorema que establece que cuando dos rectas se cortan, los ángulos opuestos son iguales.

2. En su demostración en No1 utilizó algunas suposiciones. Ahora trate de demostrar esas suposiciones.

3. Una vez mas, en sus demostraciones en No; 2, usted hizo algunas suposiciones. Ahora intente demostrar esas suposiciones y continúe este proceso hasta demostrar todas sus suposiciones.

Al intentar responder las preguntas 1, 2 y 3 los alumnos inevitablemente argumentan de manera circular. Este es un ejemplo:



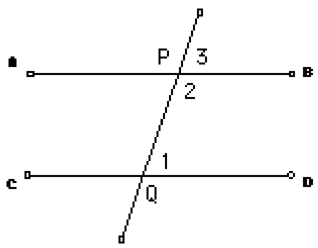
1.

$\angle Q_1 = \angle P_2$ (ángulos correspondientes, $AB \parallel CD$)

$\angle P_1 = \angle P_2$ (Angulos opuestos por el vértice)

$\therefore \angle Q_1 = \angle P_1$

Entonces ángulos alternos internos son iguales.



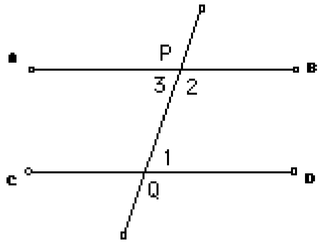
2.

$\angle Q_1 + \angle P_2 = 180°$ (ángulos adyacentes internos, $AB \parallel CD$)

$\angle P_3 + \angle P_2 = 180°$ (*QP* forma una línea recta)

$$\therefore \angle Q_1 = \angle P_3$$

Angulos correspondientes son iguales.



3.

$\angle P_3 + \angle P_2 = 180^\circ$ (*APB* es una recta)

$\angle P_3 = \angle Q_1$ (ángulos alternos internos, $AB \parallel CD$)

$\therefore \angle Q_1 + \angle P_2 = 180^\circ$

La suma de ángulos adyacentes es 180.

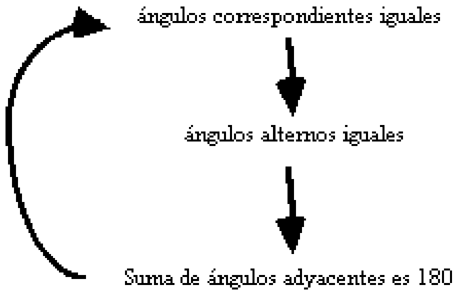


Figure 13: Un argumento circular

Estas series de demostraciones pueden representarse esquemáticamente como en la Figura 13 e ilustrar de manera clara un argumento *circular*. El problema es que no importa cuanto lo intenten, los alumnos llegan inevitablemente a alguna clase de circularidad. Aunque muchos alumnos al comienzo no identificaron el problema, con ejercicios complementarios se dieron cuenta del mismo y descubrieron que es imposible demostrar todos los enunciados matemáticos o propiedades de los objetos matemáticos sin obtener un argumento circular. Entonces comprendieron que se debía aceptar una de esas propiedades como proposición *sin demostrarla* (v.g. como definición o axioma) para evitar la circularidad.

La investigación comparativa al final del experimento USEME indicó que no sólo los grupos experimentales lograron una mayor habilidad para definir objetos geométricos conocidos y desconocidos (de manera económica y correcta), sino que habían desarrollado una comprensión profunda de la naturaleza de los axiomas, y una habilidad para reconocer argumentos circulares o no válidos (ver Human, Nel et al, 1989a).