Michael de Villiers **(1996)** E-mail: profmd@mweb.co.za
The Future of Secondary School Geometry.

La lettre de la preuve, Novembre-Décembre 1999.

Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría (3)

Software de Geometría Dinámica

El desarrollo del software de geometría dinámica en los últimos años constituye ciertamente el desarrollo más excitante en geometría desde Euclides. Además de reavivar interés en algunas investigaciones básicas en geometría, ha revitalizado la enseñanza de la geometría en muchos países donde la geometría euclidiana estaba en peligro de ser arrojada a la caneca de la historia. Por ejemplo, al quien aseguró en el congreso internacional de educación matemática (ICME) en España (julio de 1996) que la geometría dinámica había salvado el currículo de geometría en los Estados Unidos.

Como vimos anteriormente, una de las principales razones del mal desempeño de los alumnos en geometría puede explicarse con la teoría de Van Hiele. Por ejemplo, muchos alumnos no desarrollan habilidades de visualización que son un prerrequisito importante para el éxito en geometría. Además, se les introduce de manera prematura a la geometría formal sin permitirles una exploración experimental suficiente de las propiedades de las figuras y una introducción gradual de la terminología formal apropiada.

En el pasado, muchos profesores simplemente evitaban la exploración informal de relaciones geométricas por construcción y medición con papel y lápiz, ya que consumen demasiado tiempo (y son relativamente inexactas). (Por supuesto, también están los profesores que desde una posición filosófica extremadamente formalista, descalifican cualquier forma de trabajo experimental en matemáticas). Otro problema es que esas figuras construidas son " estáticas "; uno tiene que redibujar la figura o ser capaz de visualizar cómo podría cambiar de forma. Sin embargo todo esto ha cambiado con el desarrollo de algunos paquetes sofisticados de software para geometría. Uno de los primeros de estos programas " estado de la arte " fue **Cabri-Geometry**, un programa francés que fue presentado a la comunidad internacional de educación matemática en una conferencia en Budapest en 1988. Desde entonces se han desarrollado otros programas similares, por ejemplo, **Geometer's Sketchpad** elaborado por una compañía norteamericana y con asistencia de la Fundación Nacional de las Ciencias y el Proyecto de Geometría Visual del Swarthmore College, USA.

Estos programas de geometría fueron diseñados con la intención específica de poner a disposición de los alumnos un ambiente del tipo micro mundo para la exploración experimental de la geometría plana elemental. En el pasado uno tenía que dibujar las configuraciones geométricas en una hoja de papel, obteniendo así una representación más o menos exacta pero fija, y por lo tanto limitando en extremo la exploración. En estos programas las figuras geométricas pueden construirse por medio de acciones y en un lenguaje que son muy próximos a los que se usan en el universo familiar de " papel y lápiz ". En contraste con la construcción de papel y lápiz, la geometría dinámica es precisa y es muy fácil y rápido realizar construcciones complejas para luego modificarlas.

Una vez creadas, estas figuras pueden Redibujarse " agarrando " sus elementos básicos directamente en la pantalla y moviéndolos, mientras se mantienen las propiedades que se les han dado explícitamente. De esta manera se puede cambiar " continuamente " un triángulo, y por ejemplo darse cuenta que sus alturas siempre se cortan en un solo punto durante la transformación. Por lo tanto el software permite repetir fácilmente experimentos en muchas posiciones diferentes y así verificar cuáles propiedades geométricas permanecen invariantes. De hecho, cabri tiene una herramienta que puede verificar si algunas propiedades (v.g. paralelismo, concurrencia, colinealidad, perpendicularidad, etc.) son verdaderas en general, y si no lo son, puede construir contraejemplos.

Probablemente la característica más apreciada de la geometría dinámica es su potencial para estimular (re-introducir) la experimentación y esa clase de " investigación " orientada a los alumnos descrita por Luthuli (1996) y otros. En un enfoque de tipo de investigación, se introduce tempranamente a los alumnos en el arte de proponer problemas y se les dan suficientes oportunidades para explorar, conjeturar, refutar, reformular y explicar como se resalta en la figura 14 (comparar con Chazan, 1990). El software de geometría dinámica estimula en gran medida esta clase de pensamiento ya que no solamente constituye un medio poderoso para verificar conjeturas verdaderas, sino también es en extremo útil para construir contraejemplos de conjeturas falsas.

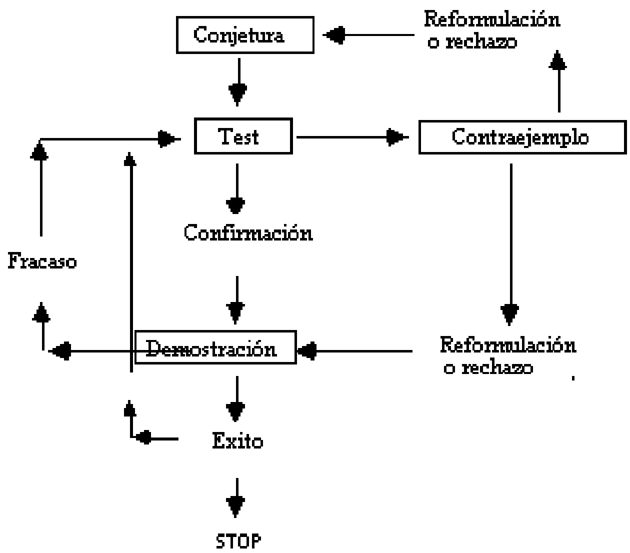


Figura 14: Investigación geométrica de los alumnos

Sin embargo, el desarrollo de la geometría dinámica también ha necesitado un cambio radical en la enseñanza de la demostración. Tradicionalmente, el enfoque crítico de la geometría era tratar de crear dudas en la mente de los estudiantes a acerca de la validez de sus observaciones empíricas, y luego tratar de motivar la necesidad de una demostración deductiva. En la experiencia, esas estrategias de tratar de generar duda para crear la necesidad de una demostración simplemente no funcionan cuando las conjeturas geométricas se investigan a fondo a través de su variación continua con un software dinámico como ***Cabri*** o ***Sketchpad***. Cuando los alumnos son capaces de producir numerosas configuraciones correspondientes de manera fácil y rápida, entonces simplemente no tienen necesidad de una verificación o comprobación. Aunque los alumnos puedan mostrar que no necesitan convencerse en esas situaciones, el autor ha encontrado relativamente fácil provocar una mayor curiosidad preguntándoles por qué piensan que un resultado particular es verdadero; p.e. desafiándolos a tratarlo y explicarlo (ver también De Villiers, 1990; 1991; Schumann & De Villiers, 1993). Los alumnos admiten rápidamente que la verificación inductiva sólo confirma; no da un sentido satisfactorio de iluminación; es decir un insight o comprensión de cómo eso es una consecuencia de otros resultados familiares. Así que los alumnos aceptan ver la argumentación deductiva como un intento de explicación, más que de verificación.

Parece que es especialmente eficaz presentar a los alumnos tempranamente resultados en los que las explicaciones (demostraciones) posibilitan generalizaciones posteriores sorprendentes (usar la demostración como herramienta de descubrimiento).En lugar de centrarse unilateralmente en la demostración como una herramienta de verificación en geometría, parece más bien que otras funciones de la demostración como la de explicación o la de descubrimiento deberían utilizarse de manera eficaz para introducir la demostración como una actividad significativa para los alumnos.

El siguiente es un ejemplo de una posible guía a este respecto tomada de De Villiers (1995a):

GUIA DE TRABAJO

a. Construya una cometa dinámica utilizando las propiedades de las cometas exploradas y discutidas en nuestras clases anteriores.

b. Asegúrese de que tiene una cometa dinámica, es decir que siempre es una cometa sin importar cómo transforme la figura. Compare su construcción con las de sus compañeros. ¿Es igual o diferente?

c. Luego construya los puntos medios de los lados y conecte los puntos medios de lados adyacentes para formar un cuadrilátero inscrito.

d. ¿Qué nota en el cuadrilátero así formado? (Realice algunas mediciones para verificar su observación).

e. Escriba su conjetura.

f. Tome cualquier vértice de su cometa y arrástrelo a una nueva posición. ¿Esto confirma su conjetura? Si no, ¿Puede modificar su conjetura?

g. Repita los pasos anteriores varias veces.

h. ¿Su conjetura también es verdadera cuando la cometa es cóncava?

i. Utilice la verificación de propiedades de cabri para verificar si su conjetura es verdadera en general.

j. Escriba su conclusión final. Compare con sus compañeros ¿Es igual o diferente?

k. ¿Puede explicar por qué es verdadera? (Tratar de explicarla en términos de otros resultados geométricos conocidos. Pista: construya las diagonales de su cometa. ¿Qué nota?)

1. Compare sus explicaciones con las de sus compañeros. ¿Está o no de acuerdo con sus explicaciones? ¿Por qué? ¿Cuál explicación es más satisfactoria? ¿Por qué?

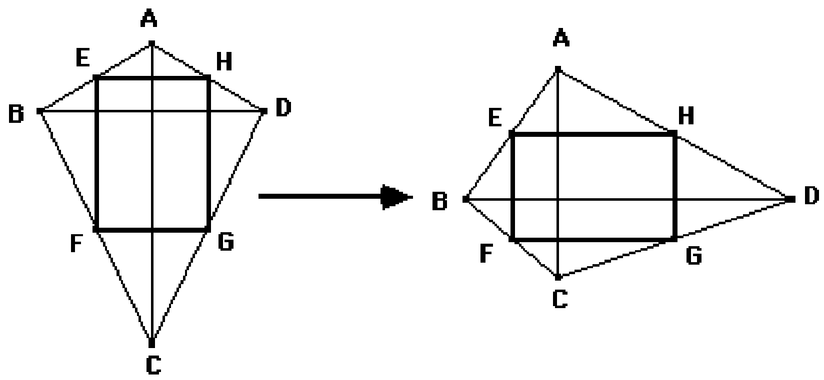


Figura 15: Explicación y descubrimiento

Formulación

Los segmentos que unen los puntos medios de lados adyacentes de una cometa forman un rectángulo.

Explicación deductiva

Un análisis deductivo muestra que el cuadrilátero inscrito siempre es un rectángulo, a causa de la perpendicularidad de las diagonales de una cometa. Por ejemplo, de acuerdo con una propiedad de los triángulos ya discutida, tenemos EF//AC en el triángulo ABC y HG//AC en el triángulo ADC (ver Figura 15a). Por lo tanto EF//HG. Igualmente, EH//BD//FG y por lo tanto EFGH es un paralelogramo. Como BD⊥ AC (propiedad de las cometas) tenemos también EF⊥EH, pero esto implica que EFGH es un rectángulo (un paralelogramo con un ángulo recto es un rectángulo).

Mirada retrospectiva

Nótese que la propiedad de lados adyacentes iguales (o un eje de simetría por un par de ángulos opuestos) no se usó en absoluto. En otras palabras, podemos generalizar inmediatamente el resultado a un cuadrilátero perpendicular como se muestra en la figura 15b. (nótese que esto también es cierto para los casos cóncavo y cruzado). Esto muestra el valor de comprender por qué algo es cierto. Aún más, nótese que el resultado general no fue sugerido por mera verificación empírica de la conjetura original. Incluso una investigación empírica sistemática de varios tipos de cuadriláteros probablemente no hubiera ayudado a descubrir el caso general, ya que la mayoría de las personas habrían restringido su investigación a los cuadriláteros más familiares como paralelogramos, rectángulos, rombos, cuadrados y rectángulos. (Nótese que de la explicación anterior también podemos ver inmediatamente que EFGH siempre será un paralelogramo en cualquier cuadrilátero. Verifíquelo en cabri o Sketchpad si usted quiere).

El lenguaje del profesor es particularmente crucial en esta fase introductoria a la demostración. En lugar de decir como de costumbre:

" No podemos estar seguros de que este resultado es verdadero para todas las posibles variaciones, y por lo tanto tenemos que demostrarlo (deductivamente) para estar

absolutamente seguros ",

Los alumnos comprenden mucho más si el profesor dice:

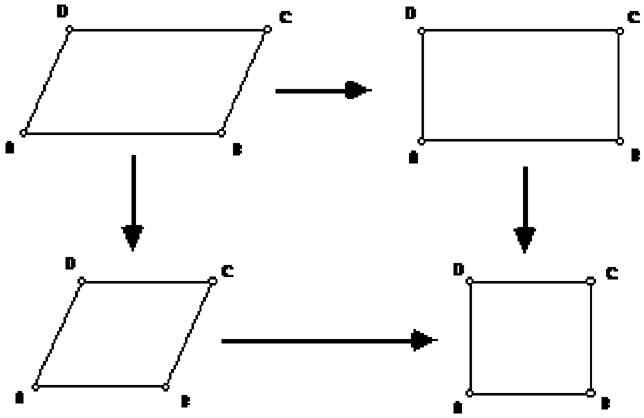
> "A*hora sabemos que este resultado debe ser cierto gracias a nuestra investigación experimental extensiva. Sin embargo miremos si podemos explicar por qué es verdadero en términos de otros resultados geométricos ya conocidos. En otras palabras cómo esto es una consecuencia lógica de esos otros resultados.* "

Normalmente es necesario discutir con algún detalle lo que se entiende por una " explicación ". Por ejemplo, la observación regular de que el Sol sale cada mañana no constituye una explicación; solamente reconfirma la validez de la observación. Para explicar algo, uno debe entonces explicarlo en términos de algo más, v.g. de la rotación de la tierra alrededor del eje polar. Igualmente, la observación regular que dice que la suma de los ángulos de un triángulo es180 no constituye una explicación; para explicarlo, necesitamos mostrar cómo (por qué) es una consecuencia lógica de algunos otros resultados que conocemos.

Por supuesto la demostración tiene muchas otras funciones, v. g. de verificación, sistematización, comunicación, de descubrimiento, reto intelectual, etc. que también deben comunicarse a los alumnos para que la demostración sea una actividad significativas para ellos. En efecto, parece significativo introducir las distintas funciones de la demostración más o menos en la secuencia dada en la figura 16. Es importante no retardar indebidamente la primera introducción de la demostración como medio de explicación, ya que los alumnos podrían acostumbrarse a ver la geometría sólo como una acumulación de hechos descubiertos empíricamente, en la cual la explicación no tiene ningún rol. Por ejemplo, incluso los alumnos en el nivel Van Hiele 1 podrían utilizar fácilmente la simetría para explicar por qué ciertos resultados son verdaderos (v.g. por qué los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales). Aunque las otras funciones pueden introducirse gradualmente a medida que los alumnos progresan del nivel 1 al 3, la función de sistematización debería dejarse para cuando los alumnos hayan alcanzado por lo menos el nivel de Van Hiele de 3 o 4. (En De Villiers (1995b) se dan algunos ejemplos de actividades para introducir las diferentes funciones). La función de comunicación está presente por supuesto todo el tiempo ya que el profesor necesita renegociar continuamente con sus alumnos los criterios acerca de qué constituye una explicación, una demostración, etc.

Figura 16: Funciones de la enseñanza de la demostración

La naturaleza dinámica de las figuras geométricas construidas en ***Sketchpad*** o ***Cabri*** también puede ayudar a aceptar sin problemas una clasificación jerárquica de los cuadriláteros. Por ejemplo, si los alumnos construyen un cuadrilátero con lados opuestos paralelos, luego pueden darse cuenta de que podrían arrastrarlo para que tenga la forma de un rectángulo, un rombo o un cuadrado como se muestra en la figura 17. Investigaciones posteriores sobre este aspecto particular serían de gran utilidad.



Transformación dinámica de un paralelogramo

Figura 17

La habilidad para transformar rápida y eficientemente las configuraciones geométricas con el software de geometría dinámica también permite modelar eficazmente situaciones reales y problemas por medio de dibujos dinámicos a escala. De esta manera es posible entregar a los alumnos problemas reales mucho más complicados de los que se les presentan actualmente. En De Villiers (1994b) se dan algunos ejemplos. Estos programas también tienen herramientas para trazar lugares geométricos de algunos objetos, v.g. puntos. Esta herramienta podría usarse fácilmente, no sólo en muchos contextos de problemas reales, sino también hace posible introducir y estudiar las cónicas como lugares geométricos (a la manera de los griegos) en lugar de verlas únicamente como curvas algebraicas como es el caso en el currículo actual